Εισαγωγή στην Τοπολογία 20/3/2018

Διάλεξη 8η
1ο φυλλάδιο ασκήσεων.

(1) X σύνολο, $f: X \to \mathbb{R}$.
$p: X \times X \to \mathbb{R}$ με $p(x,y) = |f(x) - f(y)|$.

α). Αν f είναι 1-1 να δείξετε ότι η p είναι μετρική στον X

β). Αν η f δεν είναι 1-1 να δειχθεί ότι η p δεν είναι μετρική στον X

Λύση

α) Εστω f 1-1 Ο.Δ.Ο η p είναι μετρική

i) $p(x,y) = |f(x) - f(y)| \geq 0 \quad \forall\ x,y \in X$

$p(x,y) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \xRightarrow{f\ 1-1} x = y$

ii) $p(y,x) = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| = p(x,y) \quad \forall\ x,y \in X$

Αν $x,y,z \in X$

iii) $p(x,z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$
$= p(x,y) + p(y,z)$

β) Αν η f δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν
$x,y \in X$ με $x \neq y$ ώστε $f(x) = f(y)$
Τότε $p(x,y) = |f(x) - f(y)| = 0$ με $x \neq y$ Άρα η p δεν είναι μετρική.

(2) α) (X,ρ) μ.χ.

Ν.δ.ο. η $d: X\times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y)=\sqrt{\rho(x,y)}$ είναι μετρική στο X.

Λύση

i) $d(x,y)\geq 0 \quad \forall x,y\in X$.

$d(x,y)=0 \to \sqrt{\rho(x,y)}=0 \Rightarrow \rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

ii) $d(y,x)=\sqrt{\rho(y,x)}=\sqrt{\rho(x,y)}=d(x,y) \quad \forall x,y\in X$

iii) Τριγωνική ανισότητα

Έστω $x,y,z\in X$

Θ.ν.δ.ο. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

$\Leftrightarrow \sqrt{\rho(x,z)}\leq\sqrt{\rho(x,y)}+\sqrt{\rho(y,z)} \Longrightarrow \rho(x,z)\leq\rho(x,y)+2\sqrt{\rho(x,y)}\sqrt{\rho(y,z)}+\rho(y,z)$

ισχύει $(\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z))$

Συνεπώς αποδείξαμε ότι η $d: X\times X\to\mathbb{R}$ με $d(x,y)=\sqrt{\rho(x,y)}$ είναι μετρική στον X.

Παρατήρηση: Γενικότερα αν για $0<\theta<1$ $d(x,y)=\rho(x,y)^{\theta}$ είναι μετρική.

β) Να δειχθεί ότι δεν ισχύει γενικά ότι αν ρ μετρική στο X. τότε η $d(x,y)=\rho(x,y)^2$ είναι μετρική στο X.

Λύση

Αν X είναι το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική

$$\left.\begin{array}{l} d(0,2)=|0-2|^2=4 \\ d(0,1)+d(1,2)=|0-1|^2+|1-2|^2=2 \end{array}\right\} \quad 4\neq 2.$$

και έτσι δεν ισχύει $d(0,2)\leq d(0,1)+d(1,2)$.

③ $k \in \mathbb{N}$ $(X_1, p_1)\ (X_2, p_2)\ \dots\ (X_k, p_k)$

$$X = \prod_{i=1}^{k} X_i = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$$
$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_k) : x_1 \in X_1\ x_2 \in X_2 \dots x_n \in X_n \}$$

$p : X \times X \to \mathbb{R}$ με $p((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i, y_i)$

α) Νδο η p είναι μετρική στο X.

β) Αν $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $(\bar{x}_n) = (x_n^1, \dots, x_n^k)$, $n = 1, 2, \dots$ και $\bar{x} = (x^1, \dots, x^k) \in X$ νδο $\bar{x}_n \xrightarrow{p} \bar{x}$ ανν $x_n^i \xrightarrow{p_i} x^i$ για $i = 1, \dots, k$

<u>Λύση</u> α)

i) Αν $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in X$
$\bar{y} = (y_1, \dots, y_k) \in X$

$$p(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{p_i(x_i, y_i)}_{\geq 0 \ \forall i = 1, \dots, k} \geq 0$$

και $p(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i, y_i) = 0$

$\xRightarrow{p_i(x_i, y_i) \geq 0}$ $p_i(x_i, y_i) = 0$ $\forall i = 1, \dots, k$

$\xRightarrow{p_i \text{ μετρική}}$ $x_i = y_i$ $i = 1, \dots, k$ $\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

ii) $p(\bar{y}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} p_i(y_i, x_i)$

$\overset{p_i \text{ μετρική στον } X_i}{=} \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i, y_i)$

$= p(\bar{x}, \bar{y})$

iii) Αν $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in X$.

$p(\bar{x}, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i, z_i) \leq \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i, y_i) + p_i(y_i, z_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{k} p_i(y_i, z_i)$

p_i μετρικό στον X_i $i = 1, \dots, k$

$= p(\bar{x}, \bar{y}) + p(\bar{y}, \bar{z})$

β) $(\Rightarrow)$ Αν $\bar{x}_n \xrightarrow{p} \bar{x}$

Έστω $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ τότε θδο $x_n^{i_0} \xrightarrow{p_{i_0}} x^{i_0}$

$$0 \le p_{i_0}(x_n^{i_0}, x^{i_0}) \le \sum_{i=1}^{k} p_i(x_n^i, x^i) = p(\bar{x}_n, \bar{x}) \to 0 \quad (\text{διότι } \bar{x}_n \xrightarrow{p} \bar{x})$$

Από ισοσυγκλίνουσες $\Rightarrow p_{i_0}(x_n^{i_0}, x^{i_0}) \longrightarrow 0$ δηλ $x_n^{i_0} \xrightarrow{p_{i_0}} x^{i_0}$

$\bar{x}_1 = (x_1^1, \dots, x_1^k)$

$\bar{x}_2 = (x_2^1, \dots, x_2^k)$

$\vdots$

$\bar{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$

$\bar{x} = (x^1, \dots, x^k)$

$(\Leftarrow)$ Αν $x_n^i \xrightarrow{p_i} x^i$ για $i = 1, \dots, k$

~~θδο $\bar{x}_n \xrightarrow{p} \bar{x}$~~

Τότε $p_i(x_n^i, x^i) \longrightarrow 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} p_i(x_n^i, x^i) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow p(\bar{x}_n, \bar{x}) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \bar{x}_n \xrightarrow{p} x$$

Άρα αποδείξαμε το ζητούμενο.

Σημείωση Στον $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ μπορούμε να ορίσουμε και άλλες μετρικές.

$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i(x_i, y_i)^p \right)^{1/p}$$

$1 < p < +\infty$

- Ειδικότερα για $p = 2$

$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{p_1(x_1, y_1)^2 + \dots + p_k(x_k, y_k)^2}$$

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{ p_i(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, k \}$$

Κάθε μια από αυτές αποδεικνύεται ότι είναι μετρική στο X και έχει την ίδια ιδιότητα όσον αφορά τις ακολουθίες.

④ (X,ρ) μ.χ. $x,y \in X$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθ. στο X.

$x_n \xrightarrow{\rho} x$ $y_n \xrightarrow{\rho} y$

ΝΔΟ $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$

<u>Λύση</u>

$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| \le \rho(x_n,x)+\rho(y_n,y) \to 0$ Άρα $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$

⑤ (X,ρ) μ.χ. $x \in X$ $(x_n),(y_n)$ δυο ακολουθ. στο X

$\rho(x_n,y_n) \to 0$ $x_n \to x$ ΝΔΟ $y_n \to x$

<u>Αποδ</u>

$$\rho(y_n,x) \le \rho(y_n,x_n)+\rho(x_n,x) = \underset{\downarrow \atop 0}{\rho(x_n,y_n)} + \underset{\downarrow \atop 0}{\rho(x_n,x)} \Longrightarrow$$

$\rho(y_n,x) \to 0 \Rightarrow y_n \to x$.

⑧ Να δοθεί παράδειγμα μ.χ. (X,ρ)

$x_1, x_2 \in X$ $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x_2,\varepsilon_2)$ να είναι γνήσιο υποσύνολο της $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)$.

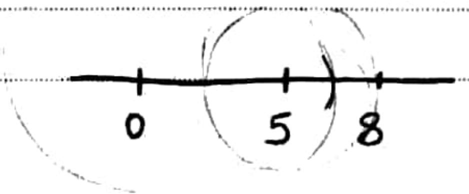
<u>Λύση</u>

Θεωρούμε το $A=\{0,5,8\}$ ως υπόχωρο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.
(Δηλ θεωρούμε τη σχετική μετρική στο A)

Άρα $(X,\rho)=(A,\rho_A)$

$B_\rho(\underset{\text{κέντρο}}{0},\underset{\text{ακτίνα}}{7}) = \{0,5\}$ $B_\rho(0,7) \subseteq B_\rho(5,6)$

$B_\rho(5,6)=\{0,5,8\}$



(6) Έστω (X,ρ) μ.χ (x_n) ακολουθία στο X και $x\in X$.
Ν.δ.ο η ισοδυναμία $x_n \to x \iff$ Για κάθε υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της (x_n) υπάρχει υπακολουθία $(x_{k\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_{k\lambda_n}\to x$.

Λύση

$(\Rightarrow)$ Αν $x_n\to x$ τότε για κάθε υπακολουθία της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $x_{k_n}\to x$
(άρα η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία του εαυτού της και συγκλίνει στο x)

$(\Leftarrow)$ Με απαγωγή σε άτοπο
Υποθέτουμε ότι $x_n \not\to x$.
Τότε $\rho(x_n,x) \not\to 0$.
άρα υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $n_0\in\mathbb{N}$ υπάρχει $n>n_0$ με $\rho(x_n,x)\geq\varepsilon$
Επαγωγικά βρίσκουμε ότι $k_1<k_2<\ldots<\ldots$ ώστε $\rho(x_{k_n},x)\geq\varepsilon \quad \forall n$
Άρα από υπόθεση η (x_{k_n}) έχει μια υπακολουθία $(x_{k\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε
$x_{k\lambda_n}\to x$. Όμως αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει εφόσον
$\rho(x_{k\lambda_n},x)\geq\varepsilon \quad \forall n$
Επομένως $x_n\to x$.

(7) Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μ.χ $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ $x\in X$.
Αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n\to x$
η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y,d) ν.δ.ο η f είναι συνεχής στο x.

$f:(X,\rho)\to(Y,d)$
f συνεχής στο x, $x\in X$
$\iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X αν $x_n\xrightarrow{\rho}x$ τότε $f(x_n)\xrightarrow{d}f(x)$

Αποδ. (Με απαγωγή σε άτοπο)
Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x
Από την αρχή μεταφοράς συγκλινουσών ακολουθιών
$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X ώστε $x_n\xrightarrow{\rho}x$ και $f(x_n)\not\xrightarrow{d}f(x)$
Εφόσον $f(x_n)\not\xrightarrow{d}f(x)$ μπορούμε να βρούμε
(όπως στην προηγ. άσκηση) $\varepsilon>0$ και $k_1<k_2<k_3<\ldots$ ώστε $d(f(x_{k_n}),f(x))\geq\varepsilon \quad \forall n$

$1^{ος}$ όρος $\quad$ $3^{ος}$ όρος

x_{k_1} $\quad$ x_{k_2} $\quad$ x_{k_3}

$2^{ος}$ όρος

x $\quad$ x $\quad$ x

Ορίζουμε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X ως εξής:

$y_{2n} = x \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$y_{2n-1} = x_{k_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Εφόσον $y_{2n}\to x$ και $y_{2n-1} = x_{k_n}\to x$ προκύπτει ότι $\boxed{y_n\to x}$

Ισχυρισμός: Η $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Απόδ. Αν η $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα $f(y_n)\to y\in Y$

τότε $f(y_{2n})\longrightarrow y$ (ως υπακολουθία)

Εφόσον $f(y_{2n}) = f(x) \quad \forall n\in\mathbb{N}$ προκύπτει $y=f(x)$.

Άρα $f(y_n)\to f(x)$, άρα $f(y_{2n-1})\to f(x)$ (ως υπακολουθία)

δηλ. $f(x_{k_n})\to f(x)$ άτοπο εφόσον $d(f(x_{k_n}), f(x))\geq\varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Επομένως η $f(y_n)$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x.

Scanned by CamScanner